Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato

Sábado 16 de agosto | CIMAT Guanajuato

Quinto examen selectivo, día 1

Problema 1.
Sea ABC un triángulo isoscéles con $AB = AC$. Un punto D es tal que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isoscéles (con AB paralela a CD y $AD = BC$). Un punto E en la recta AD (con D entre A y E) es tal que

$$\angle ABE = 2 \cdot \Big(\angle BAE - \angle AEB \Big).$$

Las rectas AC y BE se cortan en F. Demuestra que $AF = EF$.

Problema 2.
Luis tiene un tablero cuadriculado de n filas y n columnas, con $n \geq 1$. Las casillas del contorno del tablero están coloreadas de gris. También tiene suficientes fichas numeradas $1, 2, 3, \ldots$ que coloca en las casillas grises de la siguiente manera:

La ficha 1 la pone en la casilla superior izquierda y a partir de ahí, el resto las coloca una en cada casilla, consecutivamente de menor a mayor en sentido de las manecillas del reloj. Una vez que llega a la posición inicial sigue colocando fichas encima de las que ya están puestas. Por ejemplo si $n = 3$ y coloca las primeras 20 fichas, el tablero se ve como sigue con las fichas que son visibles:

17	18	19
16		20
15	14	13

Luis deja de poner fichas cuando observa que los números que están en las fichas visibles de las casillas en las esquinas del tablero suman 2012 (si no hay fichas en alguna de estas casillas solo se toma la suma en las que sí hay). ¿Para qué valores de n estas cuatro fichas pueden sumar 2012? ¿Cuáles son los posibles valores de estas cuatro fichas?

Problema 3.
Considera una cuadrícula de 12×12 en la que están escritos números enteros positivos. Tienes dos operaciones que puedes aplicar tantas veces como quieras y en el orden que quieras.

1. Puedes multiplicar todos los números de una fila por 2.
2. Puedes restar 1 de todos los números de una columna.

Demuestra que sin importar cuáles números están originalmente en la cuadrícula, siempre puedes lograr que todos se conviertan en ceros.